Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 4

Ausgabe: 07.11.2018
Abgabe: 14.11.2018

Aufgabe 4.1. (2 + 3 + 3 Punkte)

a) Argumentiere, warum die **Entscheidungsversion** von SCHEDULING-2 (d.h. für $m = 2$) in der Klasse $\mathcal{NP}$ liegt.

b) Zeige, dass das Problem sogar $\mathcal{NP}$-vollständig ist.

Hinweis: Verwende hierfür ein bekanntlich $\mathcal{NP}$-schweres Problem.

c) Zeige, dass wenn die Entscheidungsversion von SCHEDULING-2 in Polynomialzeit lösbar wäre, dann wäre auch genaues *Optimieren* von min-SCHEDULING-2 in Polynomialzeit machbar (ganzzahlige Laufzeiten können angenommen werden).

Aufgabe 4.2. BIN-PACKING (4 Punkte)

Finde eine Instanz für BIN PACKING mit $n = 6$ Objekten, für die Best-Fit-Decreasing eine bessere Lösung ausgibt als First-Fit-Decreasing. (Bemerkung: Überlege, ob es eine solche Instanz mit $n = 3$, 4 oder 5 Objekten gibt.)

Hinweis: Weise (immer) nach, dass die gefundene Instanz die geforderte Eigenschaft erfüllt!

Aufgabe 4.3. DYNAMISCHE PROGRAMMIERUNG (2 + 1 + 3 Punkte)

Bestimme nur die geeigneten Rekursionsgleichungen für die folgenden (Teil-)Probleme.

a) Wir beschränken das RUCKSACK-Problem auf Eingaben mit $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{N}$, $g_1, \ldots, g_n, G \in \mathbb{R}^+$. Sei $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$. Für $w \in \{0, 1, 2, \ldots, W\}$ bezeichne $G(i, w)$ das minimale Gesamtgewicht einer Auswahl aus den ersten i Objekten mit Gesamtwert genau w.

$$G(0, w) = \ldots$$
$$G(i, w) = \ldots$$

b) Wie findet man in Teil a) den optimalen *Wert* für die gesamte Instanz?

c) Ein Gehweg soll mit einem taktilen Leitstreifen der Breite 20 cm aus Spezial-Steinplatten versehen werden. Die verfügbaren Platten haben Breite 20 cm und Länge 50, 60 oder 80 cm. Bezeichne $M(l)$ die minimale *Anzahl* von Steinplatten, mit denen ein Streifen der Länge $l \cdot 10$ cm gebaut werden kann, bzw. sei $M(l) = \infty$, falls dies mit den vorhandenen Plattenlängen nicht machbar ist.

$$M(0) = \ldots$$
$$M(l) = \ldots$$

Bitte wenden!

Aufgabe 4.4. *Dynamische Programmierung auf Bäumen* (4 + 2 + 3 Punkte)

In einem ungerichteten Graphen $G(V, E)$ heißt $I \subseteq V$ eine *unabhängige Knotenmenge (independent set)*, wenn für zwei beliebige Knoten $i, j \in I$ gilt: $\{i, j\} \notin E$.

Im Problem max-Gewicht-Independent-Set wird in einem Eingabegraphen $G(V, E)$ mit Knotengewichten w_v $(v \in V)$ eine unabhängige Knotenmenge $I \subseteq V$ mit maximalem Gesamtgewicht der Knoten in I gesucht.

Entwirf einen effizienten Algorithmus mit dynamischer Programmierung für max-Gewicht-Independent-Set für den Spezialfall, dass der Eingabegraph ein Baum ist.

a) Bestimme, wie das maximale Gesamtgewicht einer unabhängigen Knotenmenge *bottom-up* gefunden wird.

b) Bestimme, wie die entsprechende unabhängige Knotenmenge *top-down* gefunden wird.

c) Sei $G = (V, E)$ der einfache Weg $(v_0\, v_1\, v_2\, v_3\, v_4\, v_5)$ und sei v_0 die Wurzel von G. Bestimme Knotengewichte w_i für G, sodass es vom Gewicht von v_0 abhängt, ob v_5 in einer unabhängigen Knotenmenge mit maximalem Gewicht enthalten ist.