Approximationsalgorithmen

Wintersemester 2018/2019

Dr. Annamaria Kovacs
Dipl-Math. Mahyar Behdju

GOETHE UNIVERSITÄT FRANKFURT AM MAIN
Institut für Informatik
AG Algorithm Engineering

Übung 13

Ausgabe: 30.01.2019
Abgabe: 06.02.2019

Aufgabe 13.1. *Matroide* (3 + 3 + 3 Punkte)

Entscheide, ob die folgenden Mengensysteme Matroide sind. Begründe jeweils die Antwort.

a) Seien A und B disjunkte Mengen mit $1 < |A| = |B| < \infty$ und sei $X = A \cup B$. Wir definieren das Mengensystem:
$$\mathcal{M}_a := \{Y \mid Y \subseteq A \text{ oder } Y \subseteq B\} \subset \mathcal{P}(X)$$

b) Sei der beliebige gerichtete Graph $G = (V, \overrightarrow{E})$ fixiert. Wir definieren das Mengensystem:
$$\mathcal{M}_b := \{Y \subseteq \overrightarrow{E} \mid \text{Jeder Knoten besitzt höchstens eine eingehende Kante in } Y.\}$$

c) Sei der beliebige bipartite Graph $G = (A, B, E)$ fixiert. Wir definieren das Mengensystem:
$$\mathcal{M}_c := \{Y \subseteq E \mid \text{Jeder Knoten } v \in A \text{ hat höchstens eine inzidente Kante in } Y.\}$$

Aufgabe 13.2. (2 + 3 Punkte)

Gib jeweils einen **direkten** Beweis (d.h. ohne die Erwähnung von Greedy-Algorithmen) dafür an, dass in einem monotonen Mengensystem $(\mathcal{M}, X)$ ...

a) ... die Maximalitätseigenschaft aus der Ergänzungseigenschaft folgt.

b) ... die Ergänzungseigenschaft aus der Maximalitätseigenschaft folgt.
Hinweis: Benutze eine geeignete „Zwischenmenge“ Z.

Bitte wenden!

Aufgabe 13.3. *k-Matroide* (2 + 2 + 2 Punkte)

Zeige, dass die folgenden Mengensysteme jeweils der Durchschnitt zweier Matroide sind:

a) Sei der beliebige bipartite Graph $G = (A, B, E)$ fixiert. Wir definieren das Mengensystem:

$$\mathcal{M}_a := \{Y \subseteq E \mid Y \text{ ist ein Matching (unabhängige Kantenmenge).}\}$$

b) Sei der beliebige gerichtete Graph $G = (V, \overrightarrow{E})$ fixiert. Wir definieren das Mengensystem:

$$\mathcal{M}_b := \left\{ Y \subseteq \overrightarrow{E} \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Jeder Knoten } v \in V \text{ besitzt höchstens eine eingehende} \\ \text{Kante und höchstens eine ausgehende Kante in } Y. \end{array} \right\}$$

c) Bestimme eine gute obere Schranke für den Approximationsfaktor des Greedy-Algorithmus für max-Gewicht-KREISZERLEGUNG in einem vollständigen gerichteten Graphen mit Eigenschleifen, wenn die Kantengewichte beliebige nicht-negative Werte (nicht nur Overlaps) sein dürfen.

Aufgabe 13.4. (2 + 4 Punkte)

Fixiere $k \in \mathbb{N}_{>0}$ und sei $n = 2^k$. Betrachte für das euklidische TSP die Instanz mit Punktemenge $P = \big\{(a, b) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leqslant a, b \leqslant n\big\}$.

a) Bestimme eine Rundreise optimaler Länge und beweise die Optimalität deiner Lösung.

b) Wir nennen für $i \in \{1, \ldots, k\}$ und ungerade m die vertikalen Linien mit x-Koordinate $x = m \cdot 2^{k-i} + 0.5$ und die horizontalen Linien mit y-Koordinate $y = m \cdot 2^{k-i} + 0.5$ *Gitterlinien der Schicht i*. Bestimme rekursiv eine optimale Rundreise, die jede vertikale und horizontale Gitterlinie der Schicht i höchstens 2^i-mal kreuzt. Visualisiere deine Lösung für $n = 8$.

Aufgabe 13.5. RUCKSACK-*Problem* (3 Punkte)

Wir betrachten die Greedy-Strategie für das RUCKSACK-Problem, die zuerst die Objekte absteigend nach Wert pro Gewicht sortiert, und anschließend jeweils das aktuell betrachtete Objekt in die Lösungsmenge aufnimmt, sofern dadurch die Gewichtsschranke nicht überschritten wird.

Zeige, dass diese Strategie bereits für zwei Objekte keinen endlichen Approximationsfaktor besitzt.

E-Mail: `{panni,mahyar}@ae.cs.uni-frankfurt.de`